



TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

## MAK 303 MAKİNA ELEMANLARI I

Dönem Sonu Sınav

15 Aralık 2008

Ad, Soyad \_\_\_\_\_

Dr. M. Ali Güler

Öğrenci No. \_\_\_\_\_

Verilen Zaman: 2 saat 30 dakika (12:30-15:20)

Kitap ve Notlar Kapalı

- Her soruyu dikkatle okuyunuz.
- Yaptığınız işlemleri gösteriniz.
- Sınav salonunda cep telefonu kullanmak yasaktır
- Soruları anlamak da sınavın bir parçası olduğundan gözetmenlere ve ders hocasına lütfen soru sormayınız. Eksik yada yanlış olduğunu düşündüğünüz durumlarda kendi varsayımınızı kullanınız.

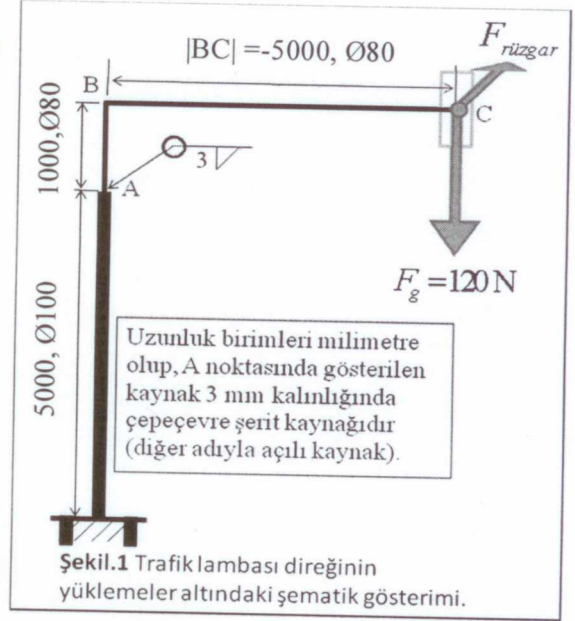
Soru No	Maksimum Puan	Puan
1	30	
2	25	
3	25	
4*	20	
5*	20	
<b>Toplam</b>	<b>100</b>	

4. veya 5. sorudan bir tanesi seçiniz.

Ön sayfa dahil, bu sınav kağıdında toplam (11) sayfa vardır.



Fotoğraf: ©M.A. Güler, İskenderun, Hatay, 8 Aralık 2008.

**1. Soru: (30 puan)**

Yukarıdaki fotoğrafta bir trafik lambasının kaynaklı konstrüksiyonu verilmiştir. Fotoğrafın yanındaki şekilde şematik olarak gösterilen bu yapı bir taraftan kendi ağırlığına bir taraftan da şiddetli rüzgâr yüküne maruz kalmaktadır (fotoğraftaki palmiye ağaçlarına bakınız<sup>1</sup>). Yapı 10 km/saat ile 50 km/saat arasında harmonik olarak değişen ve tepedeki trafik lambasına dik (31 TV 659 plakalı aracın gidiş yönünde) bir rüzgâra maruz kalmaktadır. Hasar analizini maksimum kayma gerilmesi teorisine göre yapınız. Yapının ağırlığını tepedeki trafik lambasının sentroidinde toplanmış olarak kabul edip 120 N olarak alınız. Rüzgârın uyguladığı kuvvet rüzgâra maruz kalan kesit alanla, rüzgâr hızı ve havanın yoğunluğu ile doğru orantılı olup aşağıdaki bağıntı ile hesaplanabilir<sup>2</sup>:

$$F_{Drag} = \frac{1}{2} C \rho_{air} A v^2$$

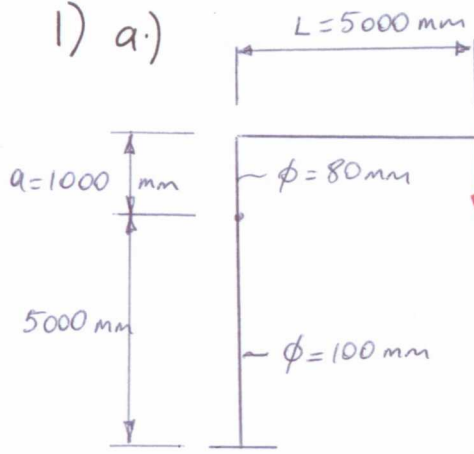
burada  $C = 2$  (drag coefficient),  $\rho_{hava} = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 1.393 \text{ m}^2$ ,  $v =$  rüzgâr hızı.

- Statik analiz yaparak halka şeklinde olan kaynak bölgesindeki eşdeğer yükleri bulunuz.
- Kaynağın boğaz bölgesindeki kayma gerilmelerini bulunuz.
- Kayma gerilmelerinden ihmal edilebilecek olanları sebebini yazarak ihmal ediniz.
- Kaynak kesitindeki kritik noktayı tesbit ederek, bu noktadaki statik yüklemeye için (rüzgârın maksimum hızını dikkate alarak) emniyet katsayısını bulunuz,  $S_y = 462 \text{ MPa}$ .
- Modified Goodman (Uyarlanmış Goodman) kriterini kullanarak dinamik yüklemeye altında kaynağın sonsuz ömrü için emniyet katsayısını bulunuz  
( $S'_e = 0.5S_{ut}$ ,  $S_{ut} = 2S_y$ ,  $k_c = 0.577$  (yük çarpanı),  $K_{fs} = 2$ , diğer çarpanlar=1).

<sup>1</sup> Yarıkkaya rüzgârlarına maruz kalan İskenderun yöresinde zaman zaman rüzgâr şiddetinin saatte 70 – 90 km'lere kadar çıktığı haber edilmiştir [Erişim tarihi 14.12.2008, <http://www.iskenderun.org/haberdetails.isk?ID=2587>].

<sup>2</sup> R.A. Serway, Physics for Scientists and Engineers with modern physics, Saunders College Pub. 3rd ed., 1990, p.140.

1) a.)



$$F^{Drag} = \frac{1}{2} C_p A v^2$$

For static loading

$$\text{take } v_{max} = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = \frac{125 \text{ m}}{9 \text{ s}}$$

$$v_{max} = 13.889 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T^{Drag} = F^{Drag} \cdot L = 322.45 \cdot (5 \text{ m}) = 1612.25 \text{ N.m}$$

$$M^{Drag} = F^{Drag} \cdot a = 322.45 \cdot (1 \text{ m}) = 322.45 \text{ N.m}$$

$$M_g = F_g \cdot L = 120 \text{ N} \cdot (5 \text{ m}) = 600 \text{ N.m}$$

$$A_{weld} = 1.414 \pi h r$$

$$I = 0.707 h (\pi r^3)$$

$$J = 0.707 h (2\pi r^3)$$

For static loading

$$F^{Drag} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1.2) \cdot (1.393) \cdot \left(\frac{125}{9}\right)^2 = 322.45 \text{ N}$$

b.) Shear stresses

$$\tau^1 = \frac{T^{Drag} \cdot r}{J} = \frac{F^{Drag} \cdot L \cdot r}{0.707 h (2\pi r^3)} = \frac{(322.45)(5000)}{0.707(3)(2\pi)(40)^2} = 75.61 \text{ MPa}$$

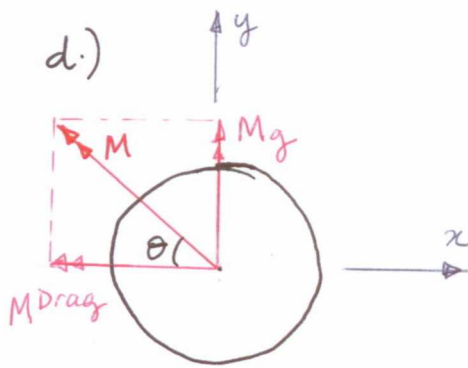
$$\tau^2 = \frac{M^{Drag} \cdot r}{I} = \frac{F^{Drag} \cdot a \cdot r}{0.707 h (\pi r^3)} = \frac{(322.45)(1000)}{0.707(3)\pi \cdot (40)^2} = 30.245 \text{ MPa}$$

$$\tau^3 = \frac{M_g \cdot r}{I} = \frac{F_g \cdot L \cdot r}{0.707 h (\pi r^3)} = \frac{(120)(5000)}{0.707(3)\pi \cdot (40)^2} = 56.28 \text{ MPa}$$

$$\tau^4 = \frac{F_g}{A_{weld}} = \frac{120}{1.414 \pi \cdot (h) r} = \frac{120}{1.414 \cdot \pi (3)(40)} = 0.225 \text{ MPa}$$

$$\tau^5 = \frac{F^{Drag}}{A_{weld}} = \frac{322.45}{1.414 \pi h r} = \frac{322.45}{1.414 \pi (3)(40)} = 0.605 \text{ MPa}$$

c) We can neglect  $\tau^4$  and  $\tau^5$



$\tau^2$  and  $\tau^3$  can be combined

$$M = \sqrt{M_g^2 + (M^{Drag})^2}$$

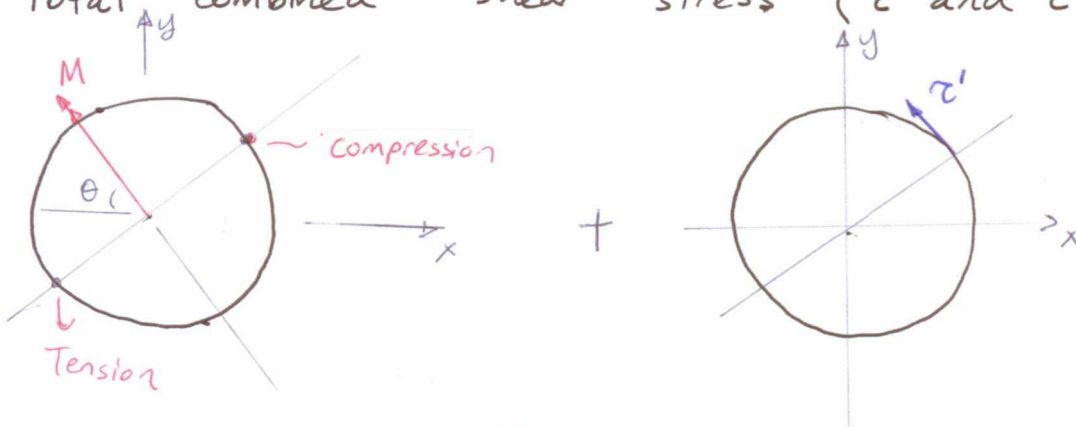
$$= \sqrt{600^2 + 322.45^2} = 681.156 \text{ N.m}$$

Shear stress due to this combined moment

$$\tau^* = \frac{M \cdot r}{I} = \frac{(681156.4) r}{0.707 h (\pi r^3)} = 63.89 \text{ MPa}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{M_g}{M^{Drag}} = \tan^{-1} \frac{600}{322.45} = 61.7^\circ$$

Total combined shear stress ( $\tau'$  and  $\tau^*$ )



$$\tau = \sqrt{(\tau')^2 + (\tau^*)^2} = \sqrt{(75.61)^2 + (63.89)^2} = 98.99 \text{ MPa}$$

Maximum shear stress criterion

$$n = \frac{S_y}{2\tau} = \frac{462}{2 \cdot (98.99)} = 2.33$$

e.)  $S_e' = 0.5 S_{ut}$  ;  $S_{ut} = 2 \cdot S_y = 2 \cdot (462) = 924 \text{ MPa}$

$$S_e = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot S_e' = k_c \cdot S_e' = (0.577)(0.5)(924)$$

$$S_e = 266.574 \text{ MPa}$$

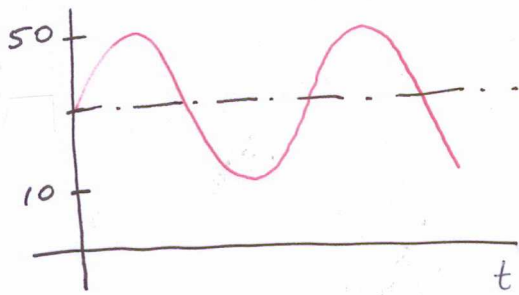
min. component of drag force

$$F_{min}^{Drag} \Rightarrow \text{use } v = 10 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \cdot \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} = \frac{25}{9} \text{ m/s}$$

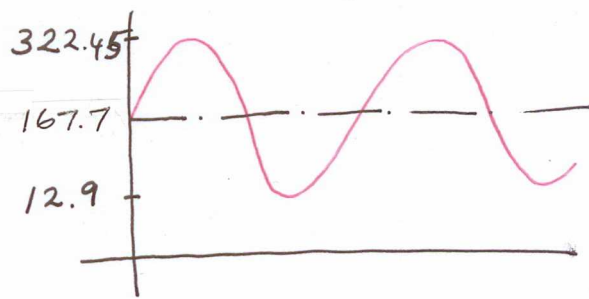
maximum component of drag force

$$F_{max}^{Drag} \Rightarrow \text{use } v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \cdot \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} = \frac{125}{9} \text{ m/s}$$

$V$  (km/h)



$F^{Drag}$  (N)



$$F_{max}^{Drag} = \frac{1}{2} \cdot C_p \cdot A \cdot V_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1.2) \cdot (1.393) \cdot \left(\frac{125}{9}\right)^2 = 322.45 \text{ N}$$

$$F_{min}^{Drag} = \frac{1}{2} C_p A V_{min}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1.2) \cdot (1.393) \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^2 = 12.9 \text{ N}$$

$$F_{mean} = \frac{322.45 + 12.9}{2} = 167.7 \text{ N} \Rightarrow F_m^{Drag} = 167.7 \text{ N}$$

$$F_{alternating} = 154.8 \text{ N} \Rightarrow F_a^{Drag} = 154.8 \text{ N}$$

$$\tau_a^1 = \frac{T_a^{Drag} \cdot r}{J} = \frac{F_a^{Drag} \cdot L \cdot r}{0.707 h (2\pi r^3)} = \frac{(154.8)(5000)}{0.707(3)2\pi(40)^2} = 36.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_m^1 = \frac{T_m^{Drag} \cdot r}{J} = \frac{F_m^{Drag} \cdot L \cdot r}{0.707 h (2\pi r^3)} = \frac{(167.7)(5000)}{0.707(3)2\pi(40)^2} = 39.3 \text{ MPa}$$

$$M_a^{Drag} = F_a^{Drag} \cdot a = (154.8)(1\text{m}) = 154.8 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_m^{Drag} = F_m^{Drag} \cdot a = (167.7)(1\text{m}) = 167.7 \text{ N}\cdot\text{m}$$

If the critical point remains the same  
Alternating component of bending moment

$$M_a = M_a^{Drag} = 154.8 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Mean component of bending moment

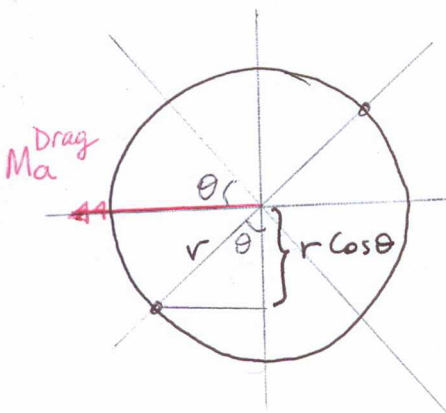
$$M_m = \sqrt{M_g^2 + (M_m^{Drag})^2} = \sqrt{600^2 + (166.7)^2} = 623 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\tau_a^* = \frac{M_a \cdot r \cos \theta}{I} = \frac{154800 \cdot r \cdot \cos(61.7)}{0.707 h (\pi r^3)} = 6.88 \text{ MPa}$$

$$\tau_m^* = \frac{M_m \cdot r}{I} = \frac{(622995.4) r}{0.707 h (\pi r^3)} = 58.43 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = \sqrt{(\tau_a^1)^2 + (\tau_a^*)^2} = \sqrt{(36.3)^2 + (6.88)^2} = 36.95 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = \sqrt{(\tau_m^1)^2 + (\tau_m^*)^2} = \sqrt{(39.3)^2 + (58.43)^2} = 70.42 \text{ MPa}$$

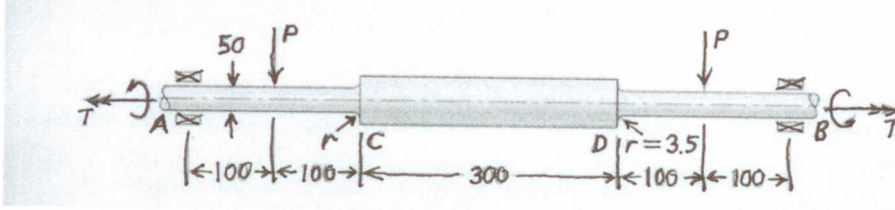


$K_{fs} = 2$  → Fatigue stress concentration factor for shear  
Modified Goodman

$$\frac{K_{fs} \tau_m}{S_{sut}} + \frac{K_{fs} \tau_a}{S_e} = \frac{1}{n_f}$$

$$\frac{(2)(70.42)}{(0.677)(924)} + \frac{2 \cdot (36.95)}{266.574} = \frac{1}{n_f}$$

$$n_f = 1.99$$



Şekil.2 [Kaynak: Fig.P9.11, sayfa 373, Ugural, Mechanical Design, McGrawHill, 1st ed., 2003.]

**2. Soru: (25 Puan)**

Şekil 2'de verilen mil, sıcak haddeleme ile imal edilmiştir(AISI 1010 HR) ve A ve B noktalarında sürtünmesiz rulmanlı yatakla yataklanmıştır(Yataklar sadece kuvvet taşımaktadır). Mil üzerine  $P$  yükü ve  $T$  torku uygulanmaktadır. Tork verilen ortalama değerden  $\pm \%15$  kadar sapmaktadır. Bütün uzunluk ölçüleri mm cinsinden verilmiştir. Emniyet katsayısını Maksimum kayma gerilmesi ile beraber Soderberg yorulma kriterine göre bulunuz. Hesaplamaları  $\% 95$  güvenilirlik faktörü için yapınız.

Verilenler :  $P = 5\text{kN}$ ,  $T = 600\text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $S_y = 600\text{ MPa}$ ,  $S_{ut} = 1000\text{ MPa}$ ,  
 $K_t = K_{ts} = 1.8$ ,  $q = 0.9$ ,  $q_s = 0.97$

For Point C or D

$$M_a = 500\text{ N}\cdot\text{m} \Rightarrow \text{alternating component of bending moment}$$

$$M_m = 0 \Rightarrow \text{mean component of bending}$$

$$T_m = 600\text{ N}\cdot\text{m} \Rightarrow \text{mean component of Torque}$$

$$T_a = (0.15)600 = 90\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$S_e' = 0.5 S_{ut} = (0.5)1000 = 500\text{ MPa}$$

$$S_e = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot S_e'$$

$$k_a = a (S_{ut})^b = 57.7 \cdot (1000)^{-0.718} = 0.4047$$

$$k_b = 1.24 (50)^{-0.107} = 0.8159$$

$$k_c = 1$$

$$k_d = 1$$

$$k_e = 0.85 \rightarrow \text{From Table}$$

$$K_f = 1 + q (K_t - 1) = 1 + 0.9 (1.8 - 1) = 1.72$$

$$K_{fs} = 1 + q_s (K_{ts} - 1) = 1 + 0.97 (1.8 - 1) = 1.776$$

$$S_e = (0.4047) (0.8159) (1) (1) (0.85) 500 = 140.33\text{ MPa}$$

$$\uparrow \Sigma M_A = 0$$

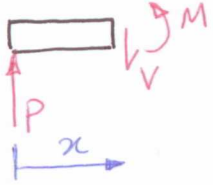
$$P \cdot (100) + P(600) - F_B(700) = 0$$

$$F_B = P$$

$$\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$F_A + F_B - P - P = 0$$

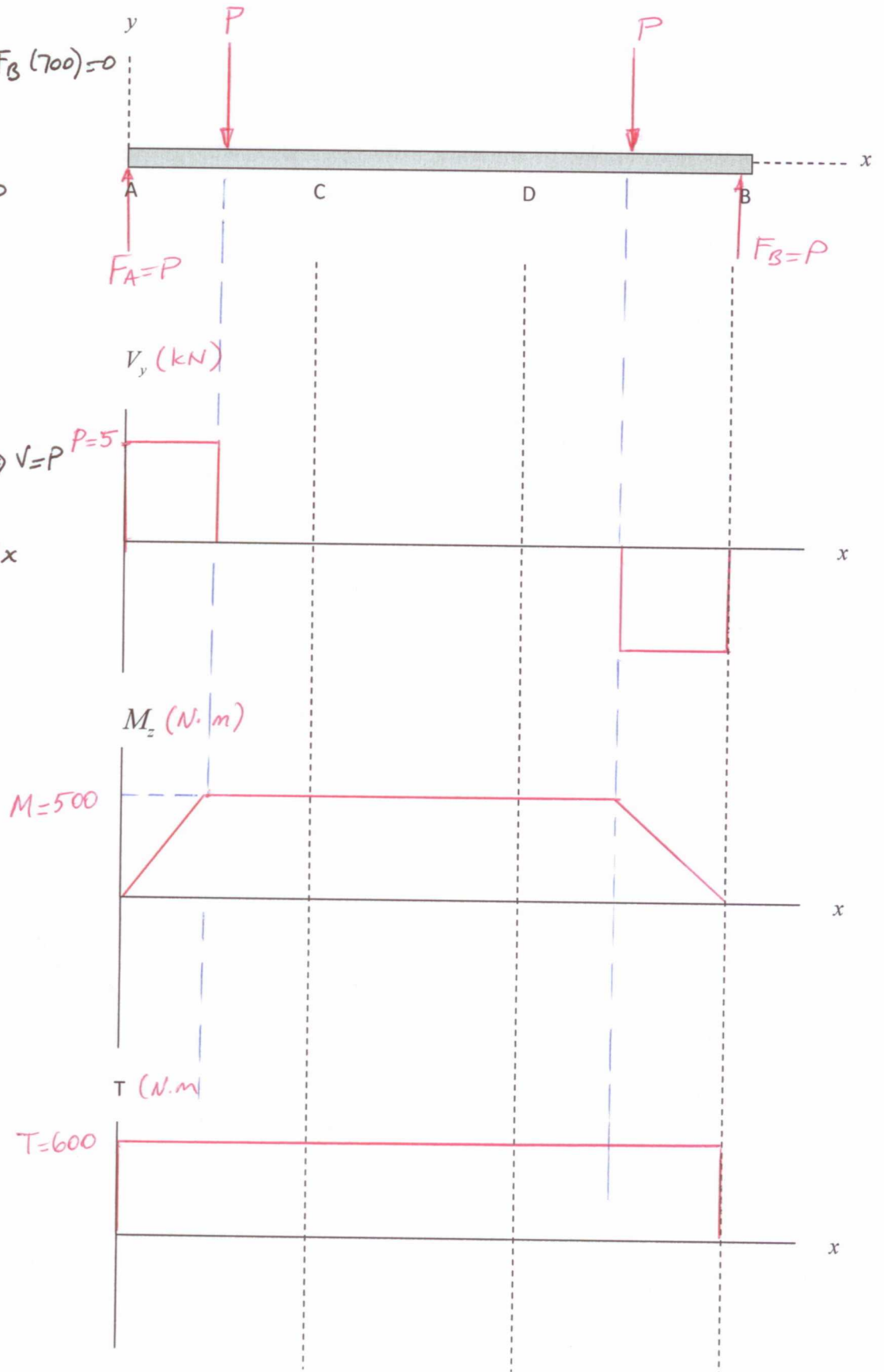
$$F_A = P$$



$$\uparrow \Sigma F_y = 0 : P - V = 0 \Rightarrow V = P$$

$$\uparrow \Sigma M = 0$$

$$P \cdot x - M = 0 \Rightarrow M = P \cdot x$$



Soderberg criteria combined with Maximum shear stress criterion

$$\frac{S_y}{n} = \frac{32}{\pi d^3} \left[ \left( M_m \cdot K_f + \frac{S_y}{S_e} M_a K_f \right)^2 + \left( T_m K_{fs} + \frac{S_y}{S_e} T_a K_{fs} \right)^2 \right]^{1/2}$$

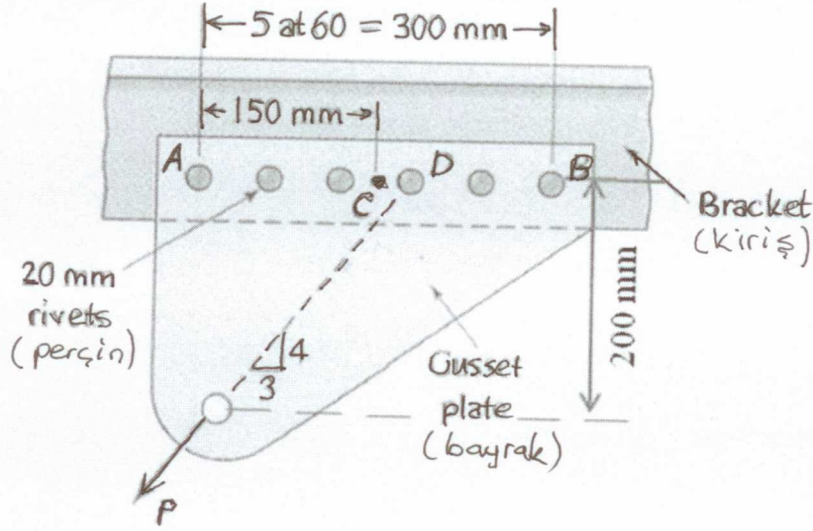
$$\frac{600 \times 10^6}{n} = \frac{32}{\pi (0.05)^3} \left[ \left\{ \left( \frac{600 \times 10^6}{140.33 \times 10^6} \right) \cdot 500 \cdot (1.72) \right\}^2 + \left\{ 600 (1.776) + \frac{600}{140.33} \cdot (90) (1.776) \right\}^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{600 \times 10^6}{n} = \frac{32}{\pi (0.05)^3} \left[ (3677.05)^2 + (1749.02)^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{600 \times 10^6}{n} = (81487.33) (4071.826)$$

$$n = \frac{600 \times 10^6}{331802235.9}$$

$$n = 1.808$$

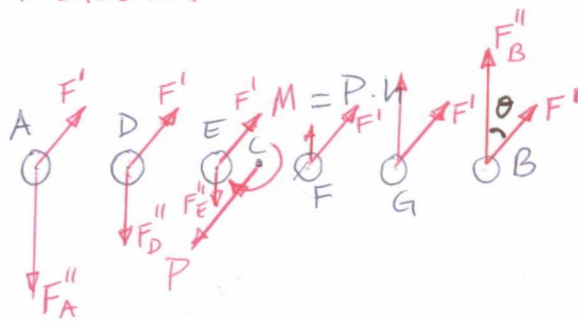
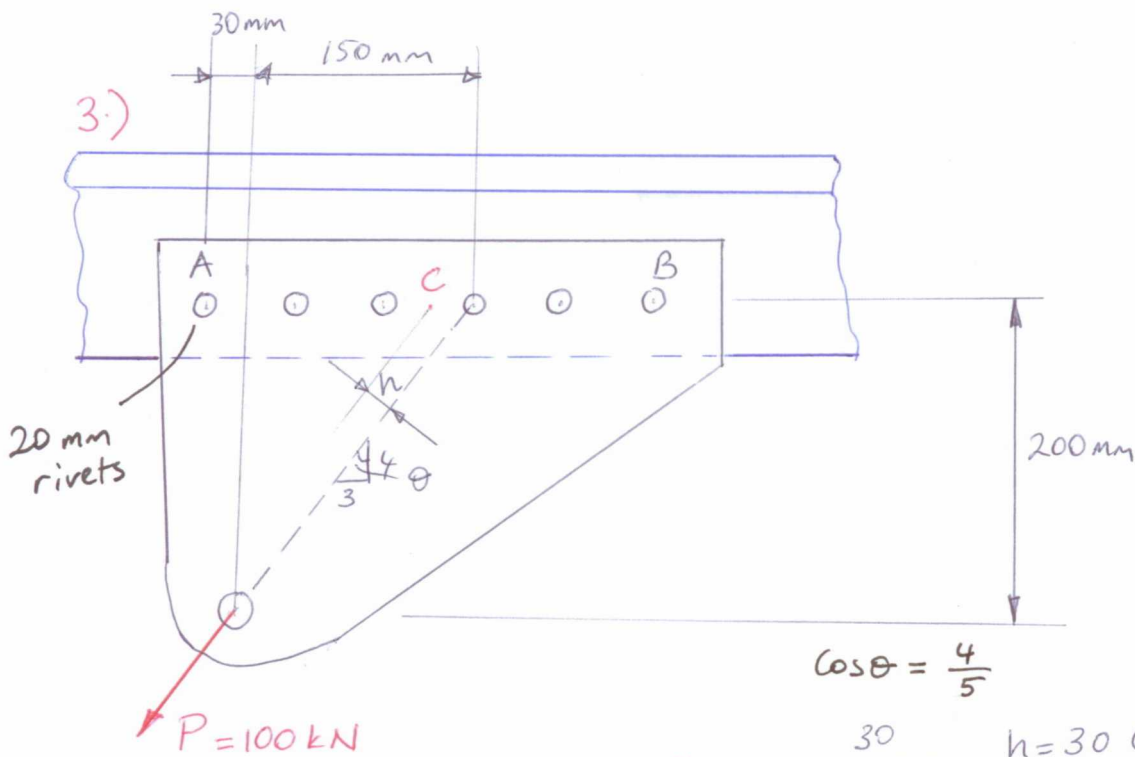


Şekil.3 [Kaynak: Fig.P15.27, sayfa 657, Ugural, Mechanical Design, McGrawHill, 1st ed., 2003.]

### 3. Soru: (25 puan)

Şekil.3'te verilen çelik konstrüksiyon yapıdaki bayrak (gusset plate) arkasındaki kirişe (bracket) perçinlerle tutturulmuş olup eksentrik bir şekilde uygulanan  $P = 100 \text{ kN}$  'luk bir yüklemeye maruz kalmaktadır. Perçinler özdeş olup  $\phi 20 \text{ mm}$  'lik 6 tane bulunmaktadır.

- Statik analiz yaparak perçin bölgesinin sentroidindeki eşdeğer yükleri bulunuz.
- Hangi perçinde maksimum kayma gerilmesi olur, neden?
- Oluşan maksimum kayma gerilmesinin değerini bulunuz.
- Bu yüklemeye altında perçinler için emniyet katsayısı 2 ise, perçinler için müsaade edilebilir maksimum kayma gerilmesinin değeri nedir?
- Bayrak plakası (gusset plate) için minimum et kalınlığını bulunuz. Yöntem: bayrak için müsaade edilebilir maksimum basma gerilmesinin perçin için hesaplanan müsaade edilebilir maksimum kayma gerilmesinin iki katı olduğunu varsayınız ve ardından plakadaki perçin deliği iz düşüm alanına düşen basıncı müsaade edilebilir maksimum kayma kuvveti ve bayrak et kalınlığı cinsinden ifade edip müsaade edilebilir maksimum basma gerilmesi değerine eşitleyiniz [Bu yöntemi öneren kaynak: M.Gediktaş, Makine Elemanları Bağlama Elemanları Konstrüksiyon ve Hesap, Çağlayan Kitabevi, 3ncü baskı, 1995, s.129-130.].



$$h = 30 \cos \theta = 30 \cdot \frac{4}{5} = 24 \text{ mm}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36.87^\circ$$

b.) The maximum reaction force occurs in the rivet B

$$F_B'' = \frac{M \cdot r_B}{r_A^2 + r_B^2 + r_D^2 + r_E^2 + r_F^2 + r_G^2}$$

$$= \frac{(100000)(24)(150)}{150^2 + 90^2 + 30^2 + 30^2 + 90^2 + 150^2} = 5714.3 \text{ N} = 5.7143 \text{ kN}$$

$$F_B' = \frac{P}{6} = \frac{100000}{6} = 16.67 \text{ kN}$$

$$F_B = \sqrt{(F_B')^2 + (F_B'')^2 - 2(F_B')(F_B'') \cos(180 - \theta)}$$

$$= \sqrt{(16.67)^2 + (5.7143)^2 - 2(16.67)(5.7143) \cos(143.13)}$$

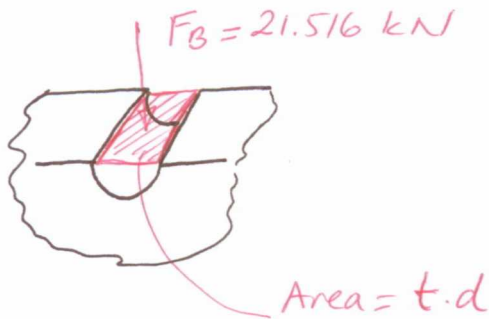
$$= \sqrt{462.954} = 21.516 \text{ kN}$$

c.)

$$\tau_B = \frac{F_B}{A} = \frac{21516.36}{\pi (10)^2} = 68.49 \text{ MPa}$$

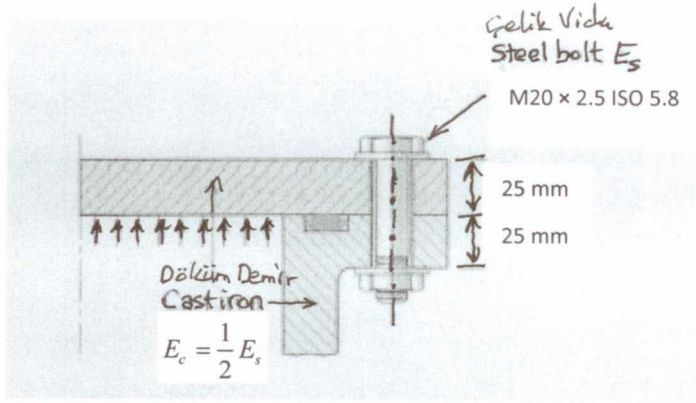
$$d.) \quad n = \frac{\tau_{all}}{\tau_B} \Rightarrow \tau_{all} = 2 \cdot \tau_B = 2 (68.49) = 136.98 \text{ MPa}$$

$$e.) \quad \tau_{all}^{plate} = 2 \cdot \tau_{all}^{rivet} = 2 (136.98) = 273.95 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{bearing} = \frac{F_B}{t \cdot d} = \frac{21516.36}{t \cdot (20)} = \tau_{all}^{plate} = 273.95 \text{ MPa}$$

$$t = 3.927 \text{ mm} \approx 4 \text{ mm}$$



Şekil.4 [Kaynak: Fig.P15.14, sayfa 624, Ugural, Mechanical Design, McGrawHill, 1st ed., 2003.]

**4. Soru: (20 puan) (Tercihe bağlı olup istenirse yerine 5. soru çözülebilir)**

Şekil 4'te kalın cidarlı bir basınçlı kaptaki kalıcı civatalı bağlantı kesiti gösterilmektedir. Bu bağlantıda şekilde gösterilen M20× 2.5 ISO 5.8 civatalardan toplam  $N_b$  tane mevcuttur.

Civatalara gelen toplam kuvvet 250 kN dur. Bu bağlantı için emniyet katsayısını (load factor) 1.5 ve  $E_s = 210$  GPa alarak

- $k_b$ ,  $k_m$ ,  $C$ 'yi bulunuz
- toplam civata sayısını  $N_b$  bulunuz
- Civatayı sıkma torkunu bulunuz.

a)

$$k_m = \frac{0.5774 \pi E d}{2 \ln \left( 5 \frac{0.5774 L + 0.5d}{0.5774 L + 2.5d} \right)}$$

$E_c = \frac{1}{2} E_s$

$$k_m = \frac{0.5774 \pi E_c \cdot (20)}{2 \ln \left( 5 \frac{0.5774(50) + 0.5(20)}{0.5774(50) + 2.5(20)} \right)} = (20.1135) E_c = (10.057) E_s$$

$$k_b = \frac{E_s \cdot A}{L} = \frac{\pi d^2 E_s}{4L} = \frac{\pi (20)^2}{4(50)} E_s = 2\pi E_s = 6.2832 E_s$$

$$C = \frac{k_b}{k_b + k_m} = \frac{6.2832 E_s}{6.2832 E_s + 10.057 E_s} = 0.3845$$

$$b.) \quad A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0.02)^2}{4} = 3.1416 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$F_p = A \cdot S_p = (3.1416 \times 10^{-4}) (380 \times 10^6) = 119.38 \text{ kPa}$$

$$F_i = 0.9 F_p = 107.442 \text{ kPa}$$

$$\frac{C \cdot n (P/N_b)}{A_t} + \frac{F_i}{A_t} = S_p$$

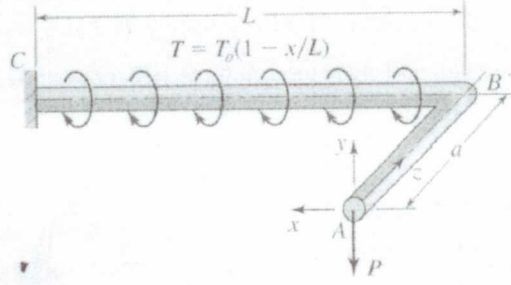
$$C \cdot n \frac{P}{N_b} + F_i = S_p A_t \Rightarrow \frac{P}{N_b} = \frac{S_p A_t - F_i}{C \cdot n}$$

$$N_b = \frac{C \cdot n \cdot P}{S_p A_t - F_i} = \frac{(0.3845)(1.5)(250 \cdot 10^3)}{(380 \cdot 10^6)(3.1416 \cdot 10^{-4}) - (107.442)(10^3)}$$

$$N_b = 12.055 \Rightarrow 12 \text{ bolts required.}$$

$$c.) \quad T = 0.2 \cdot d \cdot F_i \\ = (0.2)(0.020) \cdot (107.442 \cdot 10^3)$$

$$T = 429.768 \text{ N}\cdot\text{m}$$

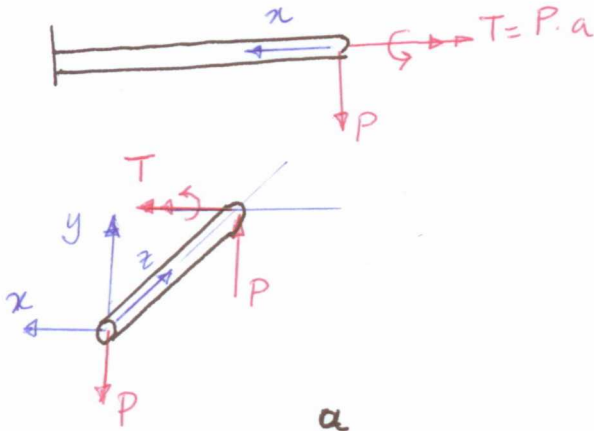


Şekil.4 [Kaynak: Fig.P5.15, sayfa 226, Ugural, Mechanical Design, McGrawHill, 1st ed., 2003.]

**5. Soru: (20 puan) (Tercihe bağlı olup istenirse yerine 4. soru çözülebilir)**

Şekilde silindirik çubuk duvara ankastre biçimde mesnetlenmiştir. Castigliano yöntemi kullanarak

- A noktasındaki sehimi ( $\delta_A = ?$ ). Sadece eğilme momentinden kaynaklı sehimi dikkate alınız.
- B noktasındaki dönme açısını bulunuz  $\phi_{BC} = ?$



$$M_x = P \cdot z \quad \frac{\partial M_x}{\partial P} = z$$

$$T = P \cdot a \quad \frac{\partial T}{\partial P} = a$$

$$M_z = P \cdot x \quad \frac{\partial M_z}{\partial P} = x$$

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^a M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial P} \cdot dz + \frac{1}{EI} \int_0^L M_z \cdot \frac{\partial M_z}{\partial P} \cdot dx + \frac{1}{GJ} \int_0^L T \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^a Pz \cdot z \cdot dz + \frac{1}{EI} \int_0^L Px \cdot x \cdot dx + \frac{1}{GJ} \int_0^L Pa \cdot a \cdot dx$$

$$= \frac{P}{EI} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^a + \frac{P}{EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L + \frac{Pa^2}{GJ} L$$

$$= \frac{P}{3EI} (a^3 + L^3) + \frac{PL}{GJ} a^2$$

$$b.) \quad T = T_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + Pa$$

$$\phi_{\theta c} = \frac{\partial}{\partial T} \left[ \int_0^L \frac{T^2 dx}{2GJ} \right] = \int_0^L \frac{T dx}{JG}$$

$$= \frac{1}{JG} \int_0^L \left( T_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + Pa \right) dx$$

$$= \frac{1}{JG} \left[ T_0 x - \frac{T_0 x^2}{2L} + Pa x \right]_0^L$$

$$= \frac{1}{JG} \left[ T_0 L - \frac{T_0 L}{2} + Pa L \right]$$

$$= \frac{L}{JG} \left[ \frac{T_0}{2} + Pa \right]$$